Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS PROTHÉSISTE-ORTHÉSISTE • CORRIGÉ DÉTAILLÉ

Mathématiques

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRD1** • Durée : **2 heures**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Refroidissement de l'eau d'un spa (12 questions) **Page 3**

2. Contrôle qualité en minoterie et étude de la farine La Romaine (12 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btspo.fr/assets/annales/bts-po/E2 - Mathématiques/2023/BTS PO - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 3 -Sujet.pdf

1. Refroidissement de l'eau d'un spa

Après l'arrêt du chauffage, la température de l'eau d'un spa initialement à 38 °C évolue dans un environnement à 25 °C. Une équation différentielle et un algorithme servent à étudier le refroidissement, une alarme et le temps nécessaire pour passer sous un seuil.

Partie A

Question 1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle homogène y' + 0,05y = 0 sur l'intervalle [0 ; +∞[.

On réécrit l'équation sous la forme $y' = -0{,}05y$. Pour une équation différentielle homogène de la forme $y' = ay$, les solutions sont $y(t) = Ce^{at}$, où C est une constante réelle. Ici, $a = -0{,}05$, donc cette famille donne toutes les solutions sur $[0; +\infty[$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{-0{,}05t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer une fonction constante solution particulière de l'équation différentielle y' + 0,05y = 1,25 sur [0 ; +∞[.

1. On cherche une solution constante, donc on pose $y(t) = k$ et $y'(t) = 0$.
2. L'équation devient $0{,}05k = 1{,}25$, d'où $k = 1{,}25/0{,}05 = 25$.

La fonction constante égale à 25 vérifie bien l'équation différentielle sur l'intervalle demandé.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Une solution particulière constante est $y(t) = 25$.

Question 3. En déduire les solutions de l'équation différentielle y' + 0,05y = 1,25 sur [0 ; +∞[.

La solution générale de l'équation complète s'obtient en ajoutant une solution particulière aux solutions de l'équation homogène. La partie homogène est $Ce^{-0{,}05t}$, avec $C \in \mathbb{R}$, et une solution particulière est la constante 25. La somme vérifie donc l'équation $y' + 0{,}05y = 1{,}25$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{-0{,}05t} + 25$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 4. Montrer que, pour tout réel t de [0 ; +∞[, f(t) = 13e$^{-0{,}05t}$ + 25.

La solution générale s'écrit $f(t) = Ce^{-0{,}05t} + 25$. Comme $f(0) = 38$ et $e^0 = 1$, on obtient $C + 25 = 38$, donc $C = 38 - 25 = 13$. En remplaçant C par cette valeur, on obtient l'expression de la température pour tout $t \geq 0$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 13e^{-0{,}05t} + 25$, pour tout $t \geq 0$.

Partie B

Question 1. Calculer f(24), arrondir la valeur au dixième, puis interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

On remplace t par 24 dans le modèle : $f(24) = 13e^{-0{,}05\times 24} + 25 = 13e^{-1{,}2} + 25 \approx 28{,}9155$. Arrondie au dixième, la température vaut $28{,}9\ ^\circ\mathrm{C}$. Cela signifie qu'après 24 heures sans chauffage, l'eau du spa est encore plus chaude que l'air ambiant, qui reste à 25 °C.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(24) \approx 28{,}9\ ^\circ\mathrm{C}$.

Question 2. a). Pour tout réel t de [0 ; +∞[, déterminer une expression de f'(t).

La dérivée de $e^{-0{,}05t}$ est $-0{,}05e^{-0{,}05t}$, par dérivation d'une exponentielle composée. Le facteur 13 est conservé et la dérivée de la constante 25 est nulle. On multiplie donc 13 par $-0{,}05$ pour obtenir l'expression de $f'(t)$, valable pour tout $t \geq 0$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f'(t) = -0{,}65e^{-0{,}05t}$.

Question 2. b). En déduire le sens de variation de f sur [0 ; +∞[et dire s'il paraît cohérent avec le contexte, en argumentant.

Pour tout $t \geq 0$, on a $e^{-0{,}05t} > 0$. Ainsi, $f'(t) = -0{,}65e^{-0{,}05t} < 0$, ce qui établit le sens de variation.

- La fonction f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.
- C'est cohérent avec le contexte : une fois le chauffage coupé, l'eau refroidit et se rapproche de la température ambiante.

✓ RÉPONSE À RETENIR

f est strictement décroissante, conformément au refroidissement de l'eau.

Question 3. a). Déterminer la limite de la fonction f en +∞.

Quand t tend vers $+\infty$, l'exposant $-0{,}05t$ tend vers $-\infty$, donc $e^{-0{,}05t}$ tend vers 0. Le terme $13e^{-0{,}05t}$ tend également vers 0. Par somme des limites, la limite de $f(t) = 13e^{-0{,}05t} + 25$ est donc la constante restante.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 25$.

Question 3. b). Interpréter la valeur de cette limite dans le contexte de l'exercice.

La limite décrit la température vers laquelle tend l'eau lorsque le temps écoulé devient très grand. Elle vaut 25 °C, soit exactement la température ambiante extérieure indiquée dans le sujet. Le modèle traduit donc qu'à long terme, après la coupure du chauffage, l'eau finit par se mettre à la température de son environnement.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> À long terme, l'eau tend vers la température ambiante de 25 °C.

Question 4. a). Une alarme retentit lorsque la température devient strictement inférieure à la température programmée. Pour une consigne de 36 °C, déterminer par le calcul le temps après la coupure auquel l'alarme sonnera, en donnant la valeur exacte puis une valeur arrondie à la minute.

1. Au seuil de 36 °C, $13e^{-0{,}05t} + 25 = 36$, donc $e^{-0{,}05t} = 11/13$.
2. En prenant le logarithme, $t = 20\ln(13/11)$ heures, soit environ 200,465 minutes.

Le seuil est atteint après environ 200 minutes, soit 3 h 20 min, à la minute près. L'alarme sonne dès que la température devient strictement inférieure à 36 °C, donc après le franchissement du seuil.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Seuil atteint à $20\ln(13/11)$ h, soit environ 3 h 20 min. L'alarme sonne ensuite.

Question 4. b). Déterminer la valeur numérique affichée par l'algorithme qui initialise H à 0 et T à 38 °C, puis augmente H d'une heure et recalcule T = 13e^−0.05H + 25 tant que T ≥ 34.

L'algorithme augmente H d'une heure avant de recalculer T. À $H = 7$, $T = 13e^{-0{,}05\times 7} + 25 \approx 34{,}161$, donc la condition $T \geq 34$ reste vraie. À $H = 8$, $T = 13e^{-0{,}05\times 8} + 25 \approx 33{,}714$, et la condition devient fausse. L'algorithme s'arrête alors et affiche cette valeur de H.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> L'algorithme affiche 8.

Question 4. c). Expliquer ce que l'algorithme permet de déterminer dans le contexte de l'exercice.

L'algorithme part de la température initiale de 38 °C, puis augmente le temps par pas d'une heure. Il recalcule la température modélisée à chaque pas et continue tant qu'elle est supérieure ou égale à 34 °C. Il détermine donc le premier nombre entier d'heures pour lequel la température devient strictement inférieure à 34 °C.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Il faut 8 heures pour que l'eau passe sous 34 °C selon l'algorithme.

2. Contrôle qualité en minoterie et étude de la farine La Romaine

Une minoterie contrôle l'extensibilité d'une pâte et le taux d'humidité de livraisons de blé, puis étudie le poids de ses sacs de farine. Les questions portent aussi sur l'acceptation d'une nouvelle farine par différents clients et sur les probabilités liées à un échantillon de 200 clients.

Partie A

Question 1. a). À partir des indices d'extensibilité des cinq échantillons de pâte, déterminer la moyenne de la série et son écart-type arrondi au centième.

Les cinq mesures sont 104, 81, 83, 57 et 55 mm. Leur moyenne vaut $\bar{x} = (104 + 81 + 83 + 57 + 55)/5 = 76$ mm. L'écart-type de la série est la racine carrée de la moyenne des carrés des écarts à la moyenne : $\sigma = \sqrt{[(104-76)^2 + (81-76)^2 + (83-76)^2 + (57-76)^2 + (55-76)^2]/5} = \sqrt{332} \approx 18,22$ mm.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Moyenne : 76 mm ; écart-type : 18,22 mm.

Question 1. b). En considérant que l'écart-type de la série est σ = 18 mm, vérifier que les cinq valeurs mesurées appartiennent à l'intervalle [x̄ − 2σ ; x̄ + 2σ], puis conclure si le technicien doit tester cinq nouveaux échantillons.

La moyenne utilisée est $\bar{x} = 76$ mm et l'écart-type imposé dans cette question est $\sigma = 18$ mm. L'intervalle de contrôle est $[76 - 2 \times 18\ ;\ 76 + 2 \times 18] = [40\ ;\ 112]$ mm. Les cinq mesures, 104, 81, 83, 57 et 55 mm, sont toutes comprises entre ces bornes. Aucune n'est en dehors de l'intervalle : le technicien n'a pas à tester cinq nouveaux échantillons.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Toutes les mesures sont dans [40 ; 112] mm : aucun nouveau test n'est nécessaire.

Question 2. À l'aide des masses et des taux d'humidité des deux chargements, montrer que le technicien peut autoriser leur déchargement dans un même silo vide, sachant que le taux d'humidité exigé est inférieur à 13 %.

La masse totale vaut $29\,540 + 14\,540 = 44\,080$ kg. La masse d'eau contenue dans le mélange est $29\,540 \times 0,124 + 14\,540 \times 0,141 = 5\,713,1$ kg. Le taux d'humidité global est donc $5\,713,1 / 44\,080 \times 100 \approx 12,96\%$. Ce taux est inférieur à 13 %, seuil exigé par le cahier des charges.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Taux du mélange : environ 12,96 % ; déchargement autorisé dans le même silo.

Partie B

Question 1. La masse X d'un sac de farine suit une loi normale de moyenne 25,2 kg et d'écart-type 0,1 kg. Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'un sac prélevé au hasard ait une masse inférieure à 25 kg.

On standardise la masse : $Z = (X - 25,2)/0,1$ suit la loi normale centrée réduite. Le seuil de 25 kg correspond à $(25 - 25,2)/0,1 = -2$. Ainsi, $P(X < 25) = P(Z < -2) \approx 0,0228$, soit 0,023 au millième près.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(X < 25) \approx 0,023$.

Question 2. a). Déterminer un réel h tel que P(25,2 − h ≤ X ≤ 25,2 + h) soit approximativement égale à 0,95, à 10^{-2} près.

Pour une loi normale, environ 95 % des valeurs se trouvent dans l'intervalle centré $[\mu - 1,96\sigma\ ;\ \mu + 1,96\sigma]$. Ici, la demi-largeur cherchée vaut $h = 1,96 \times 0,1 = 0,196$ kg. Arrondi au centième, $h = 0,20$ kg.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $h \approx 0,20$ kg.

Question 2. b). À partir de la représentation graphique fournie, expliquer pourquoi la courbe ne peut pas être celle de la fonction de densité de la variable aléatoire X.

La courbe représentée s'étale sur plusieurs kilogrammes autour de 25,2 kg. Or l'écart-type de X est seulement de 0,1 kg : environ 95 % des masses devraient se situer entre $25,2 - 1,96 \times 0,1 = 25,004$ kg et $25,2 + 1,96 \times 0,1 = 25,396$ kg. La courbe est donc beaucoup trop étalée pour être la densité de X.

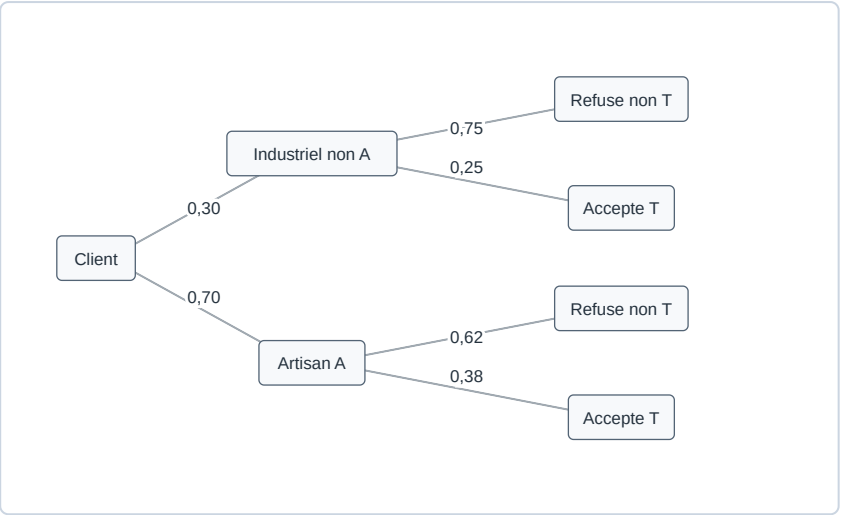
> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La courbe est trop étalée : environ 95 % des masses devraient être entre 25,004 kg et 25,396 kg.

Partie C

Question 1. Représenter la situation concernant les types de clients et leur acceptation de tester la farine La Romaine par un arbre pondéré.

On note A l'événement « le client est artisan boulanger » et T l'événement « le client accepte de tester La Romaine ». La première bifurcation distingue artisans et boulangers industriels. Les probabilités de refus sont les complémentaires des probabilités d'acceptation : 0,62 pour les artisans et 0,75 pour les industriels.

Types de clients et acceptation du test



A : artisan boulanger ; non A : boulanger industriel ; T : accepte de tester La Romaine.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Arbre pondéré de la situation.

Question 2. a). Calculer la probabilité que le client choisi soit un artisan boulanger et accepte de tester la farine La Romaine.

L'événement demandé correspond au chemin « artisan boulanger, puis accepte ». On multiplie la probabilité d'être artisan par la probabilité conditionnelle d'accepter parmi les artisans : $P(A \cap T) = P(A) \times P(T \mid A) = 0,70 \times 0,38 = 0,266$. La probabilité demandée est donc 0,266, soit 26,6 %.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A \cap T) = 0,266$, soit 26,6 %.

Question 2. b). Montrer que la probabilité qu'un client accepte de tester la farine La Romaine est égale à 0,341.

L'acceptation peut se produire par deux chemins incompatibles : « artisan et accepte » ou « industriel et accepte ». Par la formule des probabilités totales, $P(T) = 0,70 \times 0,38 + 0,30 \times 0,25 = 0,266 + 0,075 = 0,341$. La probabilité d'accepter de tester La Romaine est bien égale à 0,341.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T) = 0,341$.

Question 3. **Sachant qu'un client a testé la farine La Romaine, calculer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'il soit un artisan boulanger.**

La probabilité recherchée est $P(A \mid T) = P(A \cap T)/P(T)$. D'après les questions précédentes, $P(A \cap T) = 0,266$ et $P(T) = 0,341$. Donc $P(A \mid T) = 0,266/0,341 \approx 0,780$ au millième près.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(A \mid T) \approx 0,780$.

Question 4. a). **La variable Y suit une loi binomiale de paramètres n = 200 et p = 0,341. Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'au plus 60 des 200 clients choisis aient testé la farine La Romaine.**

Pour $Y \sim \mathcal{B}(200; 0,341)$, « au plus 60 clients » correspond à $Y \leq 60$. On additionne les probabilités binomiales pour les valeurs de 0 à 60 : $P(Y \leq 60) = \sum_{k=0}^{60} \binom{200}{k} (0,341)^k (0,659)^{200-k}$. Le calcul de cette somme donne environ 0,124 au millième près.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(Y \leq 60) \approx 0,124$.

Question 4. b). **Calculer l'espérance de la variable aléatoire Y et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.**

Pour une loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0,341$, l'espérance vaut $E(Y) = np$. Ainsi, $E(Y) = 200 \times 0,341 = 68,2$. Sur des échantillons de 200 clients, le nombre moyen de clients ayant testé La Romaine est donc de 68,2.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $E(Y) = 68,2$ clients en moyenne.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, session 2023, porte le code 23MATGRD1 et dure 2 heures. Elle étudie le refroidissement d'un spa par équation différentielle, puis des contrôles et opérations commerciales d'une minoterie. Les compétences évaluées incluent statistiques, loi normale, probabilités conditionnelles et binomiales, interprétation de résultats et lecture d'un algorithme.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' + ay = b, une solution particulière constante vaut b/a lorsque a est non nul.
- Le modèle du spa est $f(t) = 13e^{-0,05t} + 25$ et tend vers la température ambiante de 25 °C.
- Le taux d'humidité d'un mélange est une moyenne pondérée par les masses des lots.
- Pour Y suivant B(n,p), E(Y) = np ; une probabilité conditionnelle vérifie $P(A|T) = P(A \cap T)/P(T)$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités et les arrondis indiqués, notamment pour les températures, masses et probabilités.
- Pour le mélange des blés, pondérer chaque taux d'humidité par la masse correspondante.
- Dans un arbre, distinguer les probabilités inscrites sur les branches des probabilités d'intersection.
- Pour l'algorithme, suivre la condition T ≥ 34 et compter chaque incrémentation de H.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment trouver la solution de l'équation différentielle du modèle du spa ?

On résout d'abord l'équation homogène, puis on cherche une solution particulière constante. On additionne ces solutions et on utilise la condition f(0) = 38 pour déterminer la constante et obtenir le modèle de température.

Q : Comment calculer le taux d'humidité du mélange des deux camions ?

Multipliez la masse de chaque camion par son taux d'humidité, additionnez les résultats, puis divisez par la masse totale. Le taux ainsi obtenu se compare au seuil exigé de 13 %.

Q : Comment calculer la probabilité qu'au plus 60 clients aient testé la farine ?

Pour Y suivant B(200 ; 0,341), il faut calculer P(Y ≤ 60), somme des probabilités de 0 à 60. Une calculatrice ou un logiciel de loi binomiale permet d'obtenir le résultat à arrondir au millième.

Q : Comment distinguer une probabilité d'intersection d'une probabilité conditionnelle ?

Dans l'arbre, la probabilité d'une intersection correspond au produit des probabilités des branches du chemin. Pour une probabilité conditionnelle, divisez cette intersection par la probabilité de l'événement qui conditionne.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btspo.fr/assets/annales/bts-po/E2 - Mathématiques/2023/BTS PO - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 3-Sujet.pdf

Ressources BTS Prothésiste-Orthésiste : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.