Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS PROTHÉSISTE-ORTHÉSISTE • CORRIGÉ DÉTAILLÉ

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Modélisation et étude de la vitesse d'un chariot pendant son freinage** (12 questions) — **Page 3**
2. **Étude des signaux d'un système électrique par transformées de Laplace** (9 questions) — **Page 7**
3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btspo.fr/assets/annales/bts-po/E2 - Mathématiques/2022/BTS PO - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2 -Sujet.pdf

1. Modélisation et étude de la vitesse d'un chariot pendant son freinage

Un chariot de fête foraine, lancé à 20 m/s, est ralenti par un système de freinage et sa vitesse est modélisée par une fonction f. L'exercice mobilise les équations différentielles, l'étude de fonction, le calcul intégral, le développement limité et la tangente en zéro.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. **Résoudre sur [0 ; +∞[l'équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0.**

La formule fournie donne, pour l'équation homogène $y' + ay = 0$, les solutions $y(t) = ke^{-at}$, où k est une constante réelle. Ici, $a = 0,8$. Elles sont toutes définies et dérivables sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. **Vérifier que la fonction constante g définie par g(t) = 5 est une solution de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.**

La fonction constante $g(t) = 5$ a pour dérivée $g'(t) = 0$. En substituant ces expressions dans le membre de gauche, on obtient $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$. Le résultat est égal au second membre de l'équation différentielle, donc g en est bien une solution.

✓ RÉPONSE À RETENIR

g(t) = 5 est une solution de y' + 0,8y = 4.

Question 1.c. **Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.**

La solution générale de l'équation homogène associée est $y_h(t) = ke^{-0,8t}$. Comme $g(t) = 5$ est une solution particulière de l'équation complète, on obtient toutes les solutions en lui ajoutant une solution de l'équation homogène. La constante k peut prendre toute valeur réelle.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$y(t) = ke^{-0,8t} + 5$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. **Déterminer la solution f de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4 qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.**

Dans la famille des solutions, la condition initiale impose $f(0) = ke^0 + 5 = 20$. Comme $e^0 = 1$, on trouve $k = 20 - 5 = 15$. En remplaçant k dans l'expression générale, on obtient la solution recherchée sur $[0 ; +\infty[$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

f(t) = 15e$^{-0,8t}$ + 5.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1.a. Démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

Pour *f(t) = 15e$^{-0,8t}$ + 5*, lorsque *t* tend vers +∞, l'exposant *-0,8t* tend vers -∞. Ainsi, *e$^{-0,8t}$* tend vers zéro, puis *15e$^{-0,8t}$* tend vers zéro. Par somme, la limite de *f(t)* est donc égale à 5.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1.b. Déduire de cette limite que la courbe C admet une asymptote et en donner une équation.

La fonction *f* tend vers la limite finie 5 lorsque *t* tend vers +∞. La courbe représentative admet donc une asymptote horizontale dont l'ordonnée est cette limite. La droite se rapproche de la courbe lorsque le temps augmente.

✓ RÉPONSE À RETENIR

L'asymptote horizontale de C a pour équation y = 5.

Question 2. À partir de l'expression f'(t) = -12e^(-0,8t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

Comme l'exponentielle est strictement positive, *f'(t) = -12e$^{-0,8t}$ < 0* sur l'intervalle étudié. La fonction est donc strictement décroissante. Elle vaut 20 en zéro et tend vers 5 en +∞.

t	0	+∞
f'(t)	−	
f(t)	20	↘ 5

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît strictement de 20 vers 5 sur [0 ; +∞[.

Question 3. **Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.**

Pour tout instant $t \geq 0$, $15e^{-0,8t} > 0$. Donc $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$: la vitesse ne s'annule jamais. Elle diminue en se rapprochant de 5 m/s, mais cette limite n'est pas atteinte à un instant fini. Le chariot ne s'arrête donc pas selon ce modèle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> **Non : la vitesse tend vers 5 m/s sans s'annuler.**

Question 4.a. **Vérifier que F(t) = -18,75e^(-0,8t) + 5t est une primitive de f sur [0 ; +∞[.**

En dérivant $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$, on obtient $F'(t) = (-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} + 5$, soit $15e^{-0,8t} + 5$. Cette expression est exactement celle de $f(t)$. Ainsi, F est une primitive de f sur l'intervalle considéré.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> **$F'(t) = f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.**

Question 4.b. **Calculer la valeur exacte de la distance parcourue entre les instants t0 = 0 et t1 = 1 à l'aide de l'intégrale de la vitesse, puis donner une valeur arrondie au centimètre.**

La distance parcourue est l'intégrale de la vitesse. Par le théorème fondamental, $d = F(1) - F(0)$. En utilisant la primitive donnée : $d = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$ mètres. L'arrondi au centimètre donne deux décimales en mètres.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $d = 23,75 - 18,75e^{-0,8} \approx 15,33$ **m.**

Partie C - Étude locale

Question 1. **Parmi les propositions, choisir le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.**

Le polynôme de Taylor affiché est $20 - 12t + (24/5)t^2$. Pour un développement limité à l'ordre 2, le reste s'écrit $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$. Il faut donc choisir la troisième proposition, celle qui ajoute ce reste au polynôme affiché.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> **Troisième proposition : $f(t) = 20 - 12t + \frac{24}{5}t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.**

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente au point d'abscisse zéro est $y = f(0) + f'(0)t$. On a $f(0) = 20$ et, avec $f'(t) = -12e^{-0,8t}$, $f'(0) = -12$. La tangente passe donc par $(0 ; 20)$ et son coefficient directeur vaut -12.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

T : y = 20 − 12t.

2. Étude des signaux d'un système électrique par transformées de Laplace

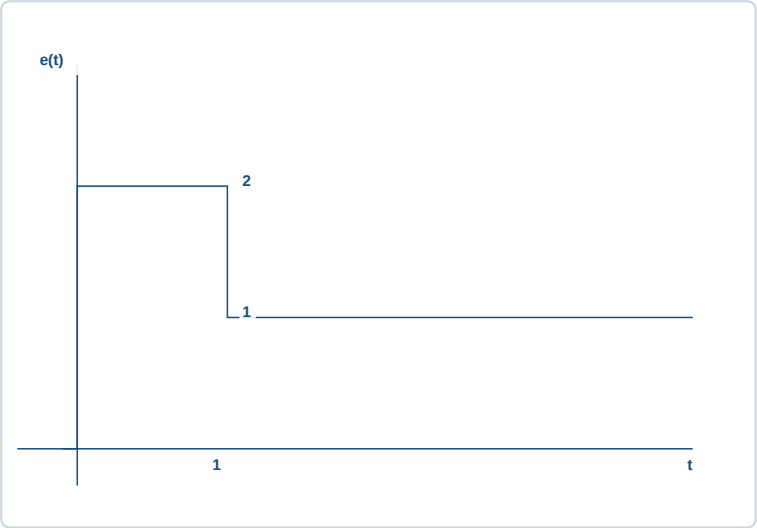
Un système électrique causal reçoit le signal e(t) = 2U(t) - U(t - 1) et produit un signal de sortie s(t), avec une fonction de transfert donnée. L'exercice demande de représenter les signaux et d'utiliser les transformées de Laplace, leur inversion et leurs propriétés de retard.

Partie A - Signal d'entrée

Question 1. **Tracer sur le document-réponse la courbe représentative de la fonction e(t).**

La causalité impose $e(t) = 0$ pour $t < 0$. Pour $0 \leq t < 1$, $U(t) = 1$ et $U(t-1) = 0$, donc $e(t) = 2$. À partir de $t = 1$, les deux échelons valent 1, donc $e(t) = 1$. Le tracé présente ainsi un saut de 0 à 2 en $t = 0$, puis un saut de 2 à 1 en $t = 1$.

Signal d’entrée e(t)



✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$e(t) = 0$ si $t < 0$, 2 si $0 \leq t < 1$, et 1 si $t \geq 1$.

Question 2. **Déterminer la transformée de Laplace E(p) du signal d'entrée.**

Par linéarité, la transformée de $2U(t)$ vaut $2/p$. La propriété de retard appliquée à l’échelon unité donne $\mathcal{L}\{U(t-1)\} = e^{-p}/p$. En soustrayant cette seconde transformée, conformément à $e(t) = 2U(t) - U(t-1)$, on obtient directement la transformée d’entrée demandée.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$$E(p) = \frac{2 - e^{-p}}{p}.$$

Partie B - Signal de sortie

Question 1. Démontrer que S(p) = 2/[p(p + 1)] - e^(-p)/[p(p + 1)].

La relation entrée-sortie est $S(p) = H(p)E(p)$. En utilisant $H(p) = 1/(p+1)$ et le résultat de la partie A, on a $S(p) = \dfrac{1}{p+1} \times \dfrac{2 - e^{-p}}{p}$. La mise au même dénominateur, puis la séparation des deux termes, donne bien la forme demandée.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $$S(p) = \frac{2}{p(p+1)} - \frac{e^{-p}}{p(p+1)}.$$

Question 2. Vérifier que 1/[p(p + 1)] = 1/p - 1/(p + 1).

On réduit le membre de droite au dénominateur commun $p(p+1)$. Son numérateur devient $(p+1) - p = 1$, d'où $\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+1} = \dfrac{1}{p(p+1)}$. L'égalité est donc vérifiée pour les valeurs de p où les deux fractions sont définies. Cette décomposition sert ensuite à déterminer les transformées inverses.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $$\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

Question 3. Donner les transformées de Laplace inverses de 1/p, 1/(p + 1), e^(-p)/p et e^(-p)/(p + 1).

Les deux premières inverses se lisent directement dans le formulaire. Pour les deux dernières, on applique la propriété de retard d'une unité : $f(t-1)U(t-1)$ a pour transformée $F(p)e^{-p}$.

Transformée	Transformée inverse
$1/p$	$U(t)$
$1/(p+1)$	$e^{-t}U(t)$
e^{-p}/p	$U(t-1)$
$e^{-p}/(p+1)$	$e^{-(t-1)}U(t-1)$

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Les inverses sont respectivement $U(t)$, $e^{-t}U(t)$, $U(t-1)$ et $e^{-(t-1)}U(t-1)$.

Question 4. **Déduire l'expression de s(t) sur l'intervalle [0 ; 1[.**

Avec la décomposition précédente, on écrit $S(p) = 2\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) - e^{-p}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right)$. En prenant les inverses, les termes retardés contiennent $U(t-1)$, nul lorsque $0 \leq t < 1$. Il reste donc $s(t) = 2\big(U(t) - e^{-t}U(t)\big)$, et sur cet intervalle $U(t) = 1$.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Sur $[0;1[$, $s(t) = 2(1 - e^{-t})$.

Question 5.a. **Sachant que s(t) = (e - 2)e^(-t) + 1 sur [1 ; +∞[, calculer s(1), d'abord sous forme exacte puis avec une valeur approchée au dixième.**

On remplace t par 1 dans l'expression donnée : $s(1) = (e-2)e^{-1} + 1$. Comme $e\,e^{-1} = 1$, cela se simplifie en $2 - 2/e$. L'évaluation donne environ $1{,}264$, soit $1{,}3$ au dixième. Cette valeur est également celle obtenue à la limite de l'expression valable sur $[0;1[$.

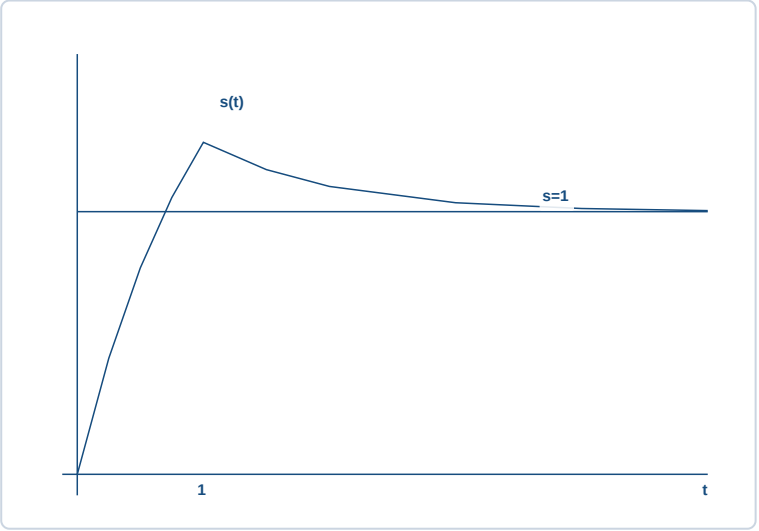
✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$s(1) = 2 - \frac{2}{e} \approx 1{,}3$.

Question 5.b. **Compléter sur le document-réponse la courbe représentative de la fonction s.**

Pour $0 \leq t < 1$, la courbe suit $s(t) = 2(1 - e^{-t})$ et croît depuis 0. En $t = 1$, elle atteint $2 - 2/e$, puis l'expression donnée pour $t \geq 1$ décroît vers 1. Les deux expressions coïncident en $t = 1$. Le tracé représente donc une courbe continue, avec un maximum en $t = 1$ et l'asymptote horizontale $s = 1$.

Courbe du signal de sortie s(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

La courbe atteint son maximum $s(1) = 2 - 2/e$, puis décroît vers l'asymptote $s = 1$.

Question 5.c. Donner la limite de s(t) lorsque t tend vers +∞.

Sur $[1; +\infty[$, on a $s(t) = (e-2)e^{-t} + 1$. Lorsque t tend vers $+\infty$, e^{-t} tend vers 0. Le facteur $e - 2$ étant constant, le produit $(e-2)e^{-t}$ tend aussi vers 0. Il ne reste alors que le terme constant de l'expression, ce qui donne la limite demandée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} s(t) = 1.$

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2022, porte le code 22MATGRB2 et dure 2 heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Elle étudie le freinage d'un chariot et les signaux d'un système électrique, en évaluant équations différentielles, fonctions, intégrales et transformées de Laplace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' + ay = b, la solution générale est la somme d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène.
- Si f(t) tend vers une limite finie L en +∞, sa courbe admet l'asymptote horizontale d'équation y = L.
- La distance parcourue entre t0 et t1 est l'intégrale de la vitesse : d = ∫ de t0 à t1 f(t) dt.
- La transformée de Laplace de f(t - a)U(t - a) est F(p)e^(-ap) : le facteur exponentiel représente un retard.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter l'intervalle d'étude et utiliser f(0) = 20 pour déterminer la constante de la solution.
- Justifier les variations par le signe de f' et relier la limite de la vitesse à la question de l'arrêt.
- Pour la distance, évaluer la primitive en t1 puis en t0 et exprimer l'arrondi au centimètre.
- Lors d'une transformée inverse contenant e^(-p), tenir compte du retard d'une unité et de l'échelon associé.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle du chariot ?

On résout d'abord l'équation homogène, puis on ajoute une solution particulière de l'équation complète. La condition initiale f(0) = 20 permet ensuite de déterminer la constante de la solution générale.

Q : Comment interpréter la limite de la vitesse pour savoir si le chariot s'arrête ?

La fonction f est décroissante et tend vers 5 m/s, une valeur positive. Dans ce modèle, la vitesse ne s'annule donc pas et le chariot ne s'arrête pas, même si elle se rapproche de sa limite.

Q : Comment organiser les deux heures d'épreuve ?

Les deux exercices valent chacun 10 points et les trois parties du premier peuvent être traitées indépendamment. Répartissez votre temps entre les exercices, avancez sur les questions accessibles et gardez quelques minutes pour vérifier les calculs et les tracés.

Q : Quelles précautions prendre pour les tracés et les transformées inverses ?

Respectez la causalité et la définition de U, puis repérez le changement de signal au retard t = 1. Pour les transformées inverses, le facteur e^(-p) décale le signal d'une unité ; les courbes demandées se tracent sur le document-réponse.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btspo.fr/assets/annales/bts-po/E2 - Mathématiques/2022/BTS PO - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

Ressources BTS Prothésiste-Orthésiste : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.