Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS PROTHÉSISTE-ORTHÉSISTE • CORRIGÉ DÉTAILLÉ

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2 pour la plupart des spécialités, 3 pour Traitement des matériaux**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Freinage d'un chariot de fête foraine** (12 questions) — **Page 3**
2. **Contrôle de conformité et durée de vie de produits** (9 questions) — **Page 7**
3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btspo.fr/assets/annales/bts-po/E2 - Mathématiques/2022/BTS PO - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1 -Sujet.pdf

1. Freinage d'un chariot de fête foraine

Un chariot lancé à 20 m/s est freiné, et sa vitesse f(t) est étudiée en fonction du temps écoulé depuis le début du freinage. Les questions portent sur une équation différentielle, l'étude de la fonction vitesse, la distance parcourue, un développement limité et la tangente à la courbe.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1. a. **Résoudre l'équation différentielle homogène (E_0) : y′ + 0,8y = 0.**

La formule fournie pour $y' + ay = 0$ donne directement les solutions avec $a = 0{,}8$. En effet, la dérivée de $ke^{-0{,}8t}$ est $-0{,}8ke^{-0{,}8t}$, ce qui vérifie l'équation.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0{,}8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1. b. **Soit g la fonction définie par g(t) = 5. Vérifier que g est une solution de l'équation différentielle (E) : y′ + 0,8y = 4.**

La fonction constante $g(t) = 5$ a pour dérivée $g'(t) = 0$.

$$g'(t) + 0{,}8g(t) = 0 + 0{,}8 \times 5 = 4$$

Elle vérifie donc l'équation (E) pour tout t.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> g est une solution de (E).

Question 1. c. **Déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) : y′ + 0,8y = 4.**

1. Une solution particulière de (E) est $g(t) = 5$.
2. On ajoute à cette solution les solutions de l'équation homogène, $ke^{-0{,}8t}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0{,}8t} + 5$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. **Déterminer la solution f de (E) qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.**

La solution générale est $f(t) = ke^{-0{,}8t} + 5$. La condition initiale impose $f(0) = k + 5 = 20$, donc $k = 15$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1. a. Démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

Comme $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$ et que $e^{-0,8t} \to 0$ lorsque $t \to +\infty$, le terme exponentiel tend vers zéro.

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = 5$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1. b. Déduire de la limite précédente que la courbe C admet une asymptote et en donner une équation.

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ étant finie et égale à 5, la courbe C admet une asymptote horizontale d'équation $y = 5$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. À partir de l'expression donnée de f'(t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

Pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle est positive, donc $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$. Ainsi, f est strictement décroissante et tend vers 5.

t	**0**	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	20	$\searrow 5$

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît strictement de 20 vers 5 sur $[0; +\infty[$.

Question 3. Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.

Pour s'arrêter, le chariot doit atteindre une vitesse nulle. Or, pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,8t} > 0$, donc :

- $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$ à tout instant fini ;
- la vitesse tend vers 5 m/s sans jamais atteindre zéro.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : la vitesse reste supérieure à $5\ \mathrm{m/s}$ et n'atteint jamais zéro.

Question 4. a. **Vérifier que la fonction F définie par F(t) = −18,75e^(−0,8t) + 5t est une primitive de f sur [0 ; +∞[.**

En dérivant $F(t) = -18{,}75e^{-0,8t} + 5t$, on obtient $F'(t) = (-18{,}75)(-0{,}8)e^{-0,8t} + 5 = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t)$. Ainsi, F est une primitive de f.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = f(t)$: F est une primitive de f.

Question 4. b. **En utilisant la formule de la distance parcourue entre deux instants, calculer la valeur exacte de la distance parcourue entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$, puis donner une valeur arrondie au centimètre.**

1. La distance entre 0 et 1 vaut $d = F(1) - F(0)$.
2. Donc $d = (-18{,}75e^{-0,8} + 5) - (-18{,}75) = 23{,}75 - 18{,}75e^{-0,8}$.
3. À l'arrondi au centimètre, cela donne $15{,}33$ m.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $d = 23{,}75 - 18{,}75e^{-0,8}\ \mathrm{m} \approx 15{,}33\ \mathrm{m}$.

Partie C - Étude locale

Question 1. **Question à choix multiples : recopier l'unique expression correcte du développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Aucune justification n'est demandée.**

La troisième proposition est la seule qui donne le développement limité à l'ordre 2 avec un reste de la forme $t^2\varepsilon(t)$, où $\varepsilon(t) \to 0$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Troisième proposition : $f(t) = 20 - 12t + \frac{24}{5}t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

La tangente en $t = 0$ a pour équation $y = f(0) + f'(0)t$. Ici, $f(0) = 20$ et $f'(0) = -12e^0 = -12$.

$$y = 20 - 12t$$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $T : y = 20 - 12t$.

2. Contrôle de conformité et durée de vie de produits

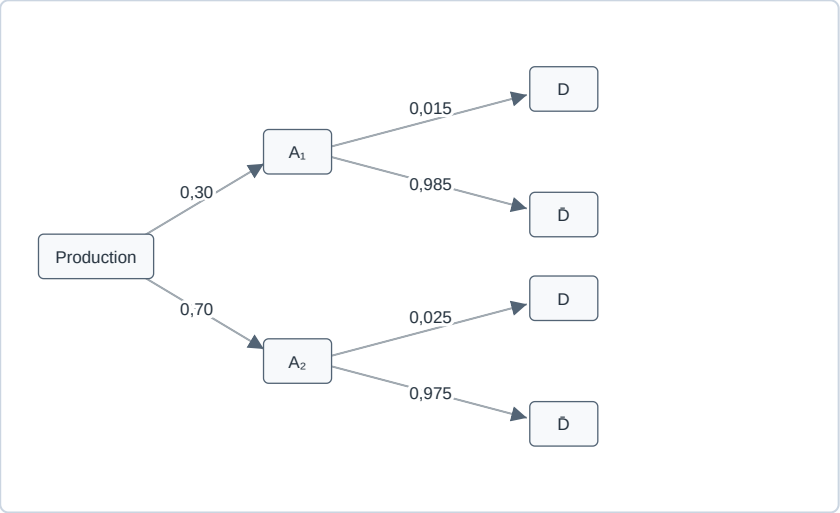
Une usine fabrique des tubes fluorescents dans deux ateliers ayant des proportions de production et des taux de défaut différents. L'exercice étudie les probabilités de défaut, la durée de vie des tubes et l'estimation de la proportion de rivets conformes à partir d'un échantillon.

Partie A - Probabilités conditionnelles

Question 1. Réaliser un arbre pondéré décrivant la production des deux ateliers et les taux de défaut associés.

Le premier niveau de l'arbre distingue les deux ateliers selon leur part de production. À partir de chaque atelier, le second niveau indique les probabilités conditionnelles d'obtenir un tube défectueux ou sans défaut. Les probabilités complémentaires sont obtenues en retranchant le taux de défaut à 1. Les branches aboutissant à chaque issue décrivent ainsi tout le parcours possible d'un tube prélevé au hasard dans la production totale de l'usine.

Arbre pondéré de la production des tubes



D : tube défectueux ; D̄ : tube sans défaut.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Arbre : A_1 (0,30), puis D (0,015) ou D̄ (0,985) ; A_2 (0,70), puis D (0,025) ou D̄ (0,975).

Question 2. Calculer la probabilité qu'un tube provienne de l'atelier 1 et présente un défaut, soit P(A₁ ∩ D).

La probabilité demandée correspond au chemin qui mène d'abord à l'atelier 1, puis à un tube défectueux. On multiplie donc la part de production de cet atelier par son taux conditionnel de défaut : $P(A_1 \cap D) = P(A_1) \times P(D \mid A_1) = 0,30 \times 0,015 = 0,0045$. Il s'agit de la proportion de toute la production qui suit ce chemin, et non du seul taux de défaut de l'atelier 1.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité qu'un tube provienne de l'atelier 1 et soit défectueux est 0,0045, soit 0,45 % de la production.

Question 3. **Montrer que la probabilité qu'un tube présente un défaut est P(D) = 0,022.**

1. Pour les tubes de l'atelier 1, la probabilité d'un défaut dans toute la production est $0,30 \times 0,015 = 0,0045$.
2. Pour les tubes de l'atelier 2, elle est $0,70 \times 0,025 = 0,0175$.
3. Les ateliers couvrent toute la production. Les deux événements étant incompatibles, on additionne leurs probabilités : $P(D) = 0,0045 + 0,0175 = 0,022$. Cette somme donne bien la probabilité qu'un tube choisi au hasard soit défectueux.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité qu'un tube choisi au hasard présente un défaut est $P(D) = 0,022$, soit 2,2 %.

Question 4. **Sachant que le tube ne présente pas de défaut, calculer la probabilité qu'il provienne de l'atelier 2.**

On cherche la probabilité d'être issu de l'atelier 2 parmi les tubes sans défaut. La probabilité conjointe d'être produit par l'atelier 2 et sans défaut vaut $0,70 \times 0,975 = 0,6825$. La probabilité d'obtenir un tube sans défaut est $1 - 0,022 = 0,978$, d'après la question précédente. On divise alors la probabilité conjointe par cette probabilité conditionnante : $P(A_2 \mid \overline{D}) = 0,6825 / 0,978$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Parmi les tubes sans défaut, la probabilité qu'un tube provienne de l'atelier 2 est environ 0,698, soit 69,8 %.

Partie B - Durée de vie des tubes fluorescents

Question 1. **Déterminer l'espérance de la durée de fonctionnement d'un tube fluorescent et interpréter le résultat dans le contexte.**

Le sujet donne une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,001$ et la formule $E(T) = 1/\lambda$. En remplaçant le paramètre, on obtient $E(T) = 1/0,001 = 1\,000$ heures. Cette espérance représente la durée moyenne de bon fonctionnement pour un grand nombre de tubes. Elle ne prédit pas la durée de vie exacte d'un tube particulier : certains fonctionneront moins longtemps et d'autres davantage.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La durée moyenne de bon fonctionnement d'un tube fluorescent est de 1 000 heures.

Question 2. **Calculer, à 10^{-2} près, la probabilité que la durée de fonctionnement du tube prélevé soit inférieure à 8 000 heures.**

1. La formule fournie pour la loi exponentielle est $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.
2. Avec $t = 8\,000$ heures et $\lambda = 0,001$, on trouve $P(T < 8\,000) = 1 - e^{-0,001 \times 8\,000} = 1 - e^{-8} \approx 0,9996645$.

3. Comme la durée est une variable continue, les événements $T < 8\,000$ et $T \leq 8\,000$ ont la même probabilité. L'arrondi au centième est donc 1,00.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité, arrondie au centième, que le tube fonctionne moins de 8 000 heures est 1,00.

Question 3. Calculer, à 10^{-2} près, la probabilité que la durée de fonctionnement du tube prélevé soit supérieure à 10 000 heures.

Pour une loi exponentielle, la probabilité de dépasser une durée donnée est la fonction de survie : $P(T > t) = e^{-\lambda t}$. Ainsi, pour $t = 10\,000$ heures et $\lambda = 0,001$, $P(T > 10\,000) = e^{-0,001 \times 10\,000} = e^{-10} \approx 0,0000454$. Cette probabilité est très faible. Arrondie au centième comme demandé, elle vaut 0,00.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité, arrondie au centième, que le tube fonctionne plus de 10 000 heures est 0,00.

Partie C - Intervalle de confiance

Question 1. À partir de l'échantillon de 1 000 rivets, dont 975 sont conformes, donner une estimation ponctuelle de la proportion inconnue p de rivets conformes.

L'estimation ponctuelle de la proportion inconnue p est la fréquence des rivets conformes dans l'échantillon. Il y a 975 rivets conformes parmi les 1 000 rivets prélevés, donc $\hat{p} = 975/1\,000 = 0,975$. Cette estimation issue de l'échantillon correspond à 97,5 % de rivets conformes dans la production. Elle constitue la valeur observée utilisée pour l'estimation de la proportion recherchée.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Estimation ponctuelle de la proportion de rivets conformes : $\hat{p} = 0,975$, soit 97,5 %.

Question 2. À l'aide de la formule fournie, déterminer un intervalle de confiance de niveau 95 % centré sur la fréquence observée pour la proportion p. Arrondir les bornes à 10^{-3} près.

La fréquence observée est $f = 0,975$ pour un échantillon de taille $n = 1\,000$. On applique la formule donnée en remplaçant f et n, puis on arrondit chaque borne au millième. L'intervalle est centré sur la fréquence observée et son demi-écart vaut $1,96\sqrt{0,975(1-0,975)/1\,000}$.

Borne	Calcul	Valeur arrondie
Inférieure	$0,975 - 1,96\sqrt{0,975(1-0,975)/1\,000} \approx 0,965323$	0,965
Supérieure	$0,975 + 1,96\sqrt{0,975(1-0,975)/1\,000} \approx 0,984677$	0,985

✓ RÉPONSE À RETENIR

Intervalle de confiance à 95 % pour p, arrondi au millième : $[0,965\ ;\ 0,985]$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, groupement B, session 2022, code 22MATGRB1, d'une durée de deux heures et coefficient 2 pour la plupart des spécialités, 3 en Traitement des matériaux. Les deux exercices, notés chacun sur 10, portent sur le freinage d'un chariot puis sur le contrôle de production : équations différentielles, fonctions, probabilités, loi exponentielle et intervalle de confiance.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Les solutions de $y' + ay = b$ sont la somme d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée.
- Pour une durée T suivant une loi exponentielle de paramètre λ, $E(T) = 1/\lambda$ et $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.
- Pour des ateliers disjoints, la probabilité d'un défaut se calcule en additionnant les probabilités des branches conduisant à un défaut.
- L'intervalle de confiance fourni est centré sur la fréquence observée f et utilise la marge $1{,}96\sqrt{f(1-f)/n}$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Distinguer le taux conditionnel de défaut dans un atelier de la probabilité conjointe atelier et défaut.
- Pour une probabilité conditionnelle inverse, identifier l'événement connu et appliquer correctement la formule de Bayes.
- Respecter le sens des inégalités dans les calculs de loi exponentielle et l'arrondi demandé.
- Pour l'intervalle de confiance, utiliser n = 1 000 et arrondir les deux bornes à 10^{-3} près.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment calculer la probabilité qu'un tube vienne d'un atelier et soit défectueux ?

Multipliez la probabilité que le tube provienne de l'atelier par la probabilité conditionnelle qu'il soit défectueux sachant cet atelier. Cette probabilité conjointe correspond à une branche complète de l'arbre pondéré.

Q : Comment calculer les probabilités associées à la durée de vie d'un tube ?

Avec le paramètre λ = 0,001, utilisez $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$ pour une durée inférieure ou égale à t, et $P(T > t) = e^{-\lambda t}$ pour une durée supérieure. L'espérance vaut $1/\lambda$.

Q : Combien de temps dure l'épreuve et comment sont répartis les points ?

L'épreuve dure deux heures. Elle comprend deux exercices de 10 points chacun, et les trois parties de chaque exercice peuvent être traitées indépendamment, ce qui permet de commencer par les questions les plus accessibles.

Q : Comment construire l'intervalle de confiance demandé pour les rivets ?

Utilisez la fréquence observée f = 975/1 000 et la formule fournie, $f \pm 1{,}96\sqrt{f(1-f)/n}$, avec n = 1 000. Arrondissez chacune des deux bornes à 10^{-3} près.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btspo.fr/assets/annales/bts-po/E2 - Mathématiques/2022/BTS PO - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

Ressources BTS Prothésiste-Orthésiste : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.